Stundenentwurf zum ersten Besonderen Unterrichtsbesuch im Fach Mathematik

Studienreferendar			3. November 2005
Carlos Mustermann			Gymnasium Mathematicum
Datum:	02.11.2005	Lehrbuch:	Elemente der Mathematik 10
Zeit:	1. Stunde (8 Uhr)	Seminarleiter:	Herr Hintze
Fach:	Mathematik	Pädagogischer Leiter:	Herr Müller–Menzel
Klasse:	10	Fachleiter:	Frau Suhr
Raum:	227	Fachlehrer:	Herr Unterstütz

Thema der Unterrichtseinheit: Körper und Körperberechnungen

Thema der Unterrichtsstunde: Berechnungen zur Größe der Oberfläche eines Zylinders

1 Unterrichtsvoraussetzungen

1.1 Bild der Lerngruppe

Seit Beginn des Schulhalbjahres unterrichte ich die Klasse 10 im Rahmen des Ausbildungsunterrichts. Sie setzt sich aus 13 Mädchen und 14 Jungen zusammen. Das Leistungsvermögen der Klasse ist als durchschnittlich zu beurteilen. In Phasen des Unterrichts, in denen es auf Problemlösefähigkeiten ankommt, treten vor allem Eugenia, Michael, Benedikt, Julius und Johannes hervor. Eher zurückhaltend, aber häufig gute Beiträge liefernd, sind Matthias, Kim und Winfried. Sehr stille Schüler sind Timo, Alexander Sch. und Shanna, deren Zurückhaltung ich auf fachliche Unsicherheit bzw. allgemeine Schüchternheit zurückführe.

Insgesamt ist die Lerngruppe als sehr inhomogen zu bezeichnen, sie hat sowohl mit Timo, Benedikt und Alexander F. drei Schüler, die das zehnte Schuljahr wiederholen, als auch mit Eugenia jemanden, der das neunte Schuljahr übersprungen hat. Unter den 27 Schülern sind insgesamt sehr viele, die schon mindestens eine Klasse wiederholt haben, was die Inhomogenität in ihren Leistungen mitbegründet.

Heterogenität macht Überlegungen zu differenzierter Herangehensweise erforderlich.

In Phasen, in denen es lediglich auf die Reproduktion von Gelerntem ankommt, arbeiten alle zufriedenstellend mit, sobald es allerdings über das formal Mathematische hinausgeht, hat die Klasse bis auf die oben genannten Personen Schwierigkeiten.

Die Leistungsbereitschaft ist generell mit gut einzuschätzen, was sich insbesondere in Gruppenarbeitsphasen, bei denen die Schüler an handhabbaren und greifbaren Objekten tätig werden konnten, durch lebendige und konzentrierte Mitarbeit zeigte. Dabei konnten sich auch eher ruhigern Schüler beteiligen. Die Präsentation von Ergebnissen erfolgt aber nicht in allen Fällen mit dem nötigen Selbstbewusstsein.

Konsequenz für methodisches Herangehen: enaktiver Zugang

Die Lernatmosphäre halte ich für gut. Die Schüler gehen freundlich miteinander um und lassen selbst Julius, der oft durch in die Länge gezogene Aussagen auffällt, aussprechen, können aber häufig den anderen nicht in dem Maße zuhören, wie es erforderlich wäre.

1.2 Einbettung der Stunde – Lernvoraussetzungen

In den vorangegangenen Stunden haben sich die Schüler mit der Berechnung rund um den Kreis beschäftigt. Dabei wurde erarbeitet, wie sich die Fläche und der Umfang eines Kreises berechnen lässt. Um ein „Gefühl" für die Irrationalität der Zahl π zu bekommen, wurde die Fläche eines Kreises durch ein- und umbeschriebene n-Ecke näherungsweise bestimmt. Dazu haben die Schüler auch am Computer mit EXCEL ein Verfahren zur Annäherung an die Zahl π durchgeführt.

Die Berechnungen zum Flächeninhalt undUmfang eines Kreises wurden aufmannigfaltige Weise an Anwendungsaufgaben, die sich an der Umwelt der Schüler orientierten (Fahrrad; Pizza etc.), anhand einer Lerntheke geübt; die Schüler hatten hierbei auch die Möglichkeit an bereitgestellten Gegenständen messend tätig zu werden.

Absicherung von inhaltlichen und methodischen Voraussetzungen

In den letzten beiden Stunden dienten der Berechnungen an Kreisausschnitten und Kreisbögen, wobei hauptsächlich die Arbeit mit einem Partner im Vordergrund stand.

Neu in dieser Stunde wird die Betrachtung eines Körpers mit kreisförmiger Grundfläche (Zylinder) sein.

2 Vorüberlegung zur Didaktik und Methodik

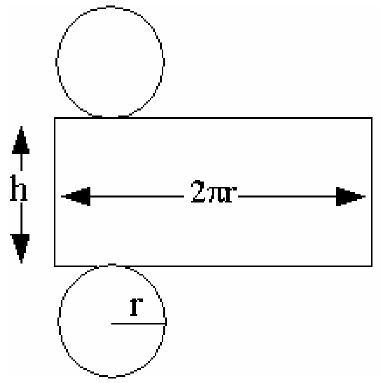
2.1 Sachanalyse

Bei einem Zylinder handelt es sich um einen Körper, dessen Grundflächen Kreise sind, die parallel und zueinander kongruent sind. Die Fläche, die diese beiden Grundflächen miteinander verbindet heißt Mantelfläche. Die Höhe des Zylinders ist dabei der Abstand der beiden Grundflächen.

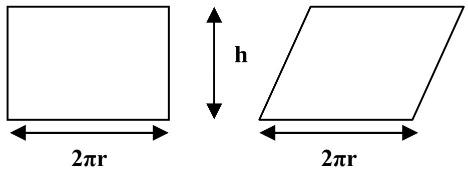
In dieser Stunde soll die Größe der Oberfläche eines vorgegebenen Zylinders bestimmt werden.

Dabei lässt sich die Zylinderoberfläche als eine ausgerollte Mantelfläche M der Seitenlänge 2πr und der Höhe h darstellen und zwei Kreisflächen, welche die beiden Grundflächen G darstellen. Somit lässt sich die Oberfläche O eines Zylinders berechnen als:

$$\begin{aligned} O &= 2\cdot G + M \\ &= 2\cdot G + \text{Umfang}\cdot\text{Höhe} \\ &= 2\cdot \pi r^2 + 2\pi r\cdot h \\ &= 2\cdot \pi r\cdot (r+h) \end{aligned}$$



Durch die Zerlegung des Zylinders in eine Mantel– und zwei Kreisflächen ist die Oberfläche als ein Netz darstellbar, was die, Berechnung und das Ausmessen der benötigten Größen vereinfacht.
Die dargelegte Zerlegung ergibt sich, wenn der Mantelfläche orthogonal zur Grundfläche aufgeschnitten wird. Bei nicht orthogonalem Schnittverlauf ergibt sich als Mantelfläche ein Parallelogramm, mit gleichem Flächeninhalt, da Seitenlänge und Höhe gleich sind.



2.2 Didaktische Vorüberlegungen

Die curricularen Vorgaben Niedersachsens sehen für das Gymnasium in der zehnten Klasse die Behandlung des Bausteins „*Längen, Flächeninhalte, Rauminhalte und Näherungsverfahren* “ vor. Insbesondere beinhaltet dieser Baustein Berechnungen am Zylinder. Dieser geometrische Körper orientiert sich gewisser Maßen an der Lebensumwelt der Schüler, da den Schülern dieses Objekt aus ihrem Alltag bekannt sein dürfte. Viele Dinge, sowohl Spielgegenstände wie zum Beispiel Tennisbälle als auch Lebensmittel, sind in dieser Form verpackt. Auch die Litfasssäule ist ihnen aus ihrer Alltagswelt bekannt. Der Unterrichtsgegenstand bietet so die Möglichkeit die Rolle der Mathematik in der Welt zu erkennen bzw. zu verstehen.

ein Aspekt von *mathematical literacy*

Das Hauptziel dieser Stunde ist die Berechnung der Oberfläche eines Zylinders.
Um zu diesem Hauptziel zu gelangen, benötigen die Schüler die folgenden Fähigkeiten:

1. Räumliche Vorstellungen von Körpern insbesondere von Zylindern,
2. Erkennen der Netzstruktur des Zylinders
3. Die Erkenntnis, dass beim Zerschneiden des Zylinders sein Umfang in eine Seitenlänge des Parallelogramms bzw. Rechtecks übergeht.
4. Erkennen der Flächeninhaltstreue beim beliebigen Zerschneiden des Zylinders in die Mantelfläche
5. Kenntnis der Flächeninhaltsberechnung von Kreisflächen, Rechtecksflächen und Parallelogrammflächen.

Der angestrebte Erkenntnisweg wird aufgezeigt

Durch die Betrachtung von Pyramiden, Kegeln und Tetraedern habe ich versucht, die räumliche Vorstellungskraft der Schüler zu entwickeln. Flächeninhalte von Kreisen, Parallelogrammen und Rechtecken können sie mithilfe der üblich gegebenen Größen (Seitenlängen, Höhe, Radius) bestimmen.
Bisher können die Schüler die Volumina von geraden Prismen mit beliebigen Polygonen als Grundfläche bestimmen (Jahrgangstufe 8). Im Sinne einer Kompetenzerweiterung wird dies Wissen nun auf Körper mit kreisförmiger Grundfläche übertragen.

vertikale Vernetzung Kompetenzerweiterung

Ich habe mich dazu entschlossen, als Untersuchungsgegenstand eine Papprolle zu verwenden,

deren Öffnungen ich mit Pappkreisen geschlossen habe. Die Papprolle steht stellvertretend für Zylinder, die nicht aufgeschnitten werden können (Posterrolle aus Plastik, Lifaßsäule).
Nach dem Aufschneiden dieser Rolle ist es den Schülern möglich, sowohl die Netzstruktur als auch die Flächeninhalts- und Umfangstreue zu erkennen (2. – 4.) und als Grundprinzip auf jeden beliebigen Zylinder zu übertragen. Sollte einzelnen Schülern die Idee des Aufschneidens fehlen, möchte ich durch gestufte Impulse helfen; z.B. durch eine „Umkehrfrage“: „Stell’ dir vor, du solltest eine Papprolle herstellen“.

Strategieschulung: Betrachtung eines Spezialfalles

Zudem ist dieser Gegenstand geeignet, die unterschiedlichen Leistungsniveaus der Lerngruppe durch Schneiden, Messen. Bezeichnen von Linien, konkretes Rechnen und verallgemeinertes Rechnen mit Variablen anzusprechen.

Bezug zur Lerngruppe

Während die Oberflächenbestimmung von Papp- bzw. Posterrolle das Messen des Umfangs voraussetzt, fordert die Formel den Radius als bekannte Größe. Insofern stellt der Übergang vom konkreten Objekt zur abstrakten Formel einen Paradigmenwechsel dar, in dem die Kenntnisse über Kreisradius und Kreisumfang evident werden.

Bezug zu den Lernvoraussetzungen

2.3 Methodische Vorüberlegungen

Von der Posterrolle, die ich zu Beginn der Stunde präsentiere, erhoffe ich mir erstens den Fokus den Unterrichtsgegenstand dieser Stunde zu lenken und zweitens dadurch einen Alltagsbezug bei den Schülern herzustellen, um die Schüler für das Problem zu motivieren. Ferner möchte ich die Schüler zunächst zu kontextfreien Beiträgen animieren, indem sie den Materialverbrauch zur Herstellung der Plastikrolle abschätzen; der Hinweis auf die Größe der Seitentafel als Referenzgröße könnte dabei die Idee des Auf- bzw Abrollens induzieren. In der anschließenden Experimentierphase erhalten die Schüler anschließend die Möglichkeit, enaktiv bei der Problembehandlung in Partnerarbeit vorzugehen. So wird gleichzeitig ein Methodenwechsel gewährleistet, da die Schüler nun motorisch–handelnd agieren können bzw. müssen.
Die Einteilung der Partnerarbeit orientiert sich an der räumlichen Struktur des Unterrichtsraumes. Weil vier Schüler in einer Reihe sitzen, bietet sich die Arbeit in Zweier- bzw. Vierergruppen an; Zweiergruppen ermöglichen dabei eine intensivere Auseinandersetzung mit dem Lerngegenstand. Da die Schüler es gewohnt sind, im Mathematikunterricht in drei (!!) unterschiedlichen Räumen und daher mit unterschiedlichen Sitznachbarn zu arbeiten, erwarte ich einen reibungsfreien Ablauf der Partnerarbeit.

Aussagen zum organisatorischen Ablauf

Die Aufgabenstellung zur Bestimmung der Mantelfläche der gegebenen „Klorolle“ soll zunächst offen sein, um den Schülern die Möglichkeit zu geben selbst und eigenständig zu probieren bzw. zu entdecken. Dabei erhoffe ich mir, dass zunächst jeder für sich eine Idee entwickelt, wie weiter mit der Rolle verfahren werden soll, bevor mit dem Partner diskutiert wird. So stellt jeder Schüler zunächst in einer

Begründung des methodischen Zugangs

„Ich“–Phase Bezüge zum eigenen Ich und zum individuellen Vorwissen her, während dann in einer „Du“–Phase mit dem Partner ein Gedankenaustausch stattfindet und dem Einzelnen ein tieferes Eindringen in das Themengebiet erlaubt. Von dieser Phase erhoffe ich mir, dass die Schüler ohne Hilfestellung durch den Lehrer zur Schere greifen.

In der „Ich-Du“-Phase tritt der Lehrer so weit wie möglich in den Hintergrund, um einen eigenständigen Erkenntnisgewinn zu ermöglichen. Damit erklärt sich das angestrebte Lehrerverhalten.

Ich erwarte mir von dem Zerschneiden der „Klorolle“ eine Visualisierung des Problems hinsichtlich der Bildung eines Zylindernetzes, zudem sich dann die Möglichkeit bietet, das Problem über das Messen anzugehen und nicht nur „verkopft“ über rein mathematische Formalisierung, welche für viele Schüler noch mit Problemen behaftet ist. Dies bietet insbesondere den schwächeren Schülern die Möglichkeit, Teilerfolge zu erreichen und nicht durch stärkere Schüler auf der formalmathematischen Ebene abgehängt zu werden.

Denkbar wäre auch, die „Klorolle“ durch einen anderen Gegenstand zu ersetzen. Dagegen spricht, dass „Klorollen“ kostengünstig und leicht zu beschaffen sind.

Schüler, die sehr schnell zu einem Ergebnis kommen, könnten als Variation bzw. Erweiterung eine zweite Klorolle bekommen und diese auf andere Weise zerschneiden, so dass sie ein Parallelogramm erhalten und das Problem nochmals - aber unter anderen Voraussetzungen - bearbeiten. Ferner könnten diese Schüler sich schon mit dem Auffinden einer allgemeinen Formel befassen. Dies stellt eine Differenzierung innerhalb der Aufgabenstellung bzw. der Problembefassung dar.

Verzweigungsmöglichkeit, die der Heterogenität der Lerngruppe Rechnung trägt

In der folgenden Sammlungsphase tragen die Schüler ihre Ergebnisse vor, die dann an der Tafel gesammelt und gesichert werden. Sollten die Schüler nicht mit einem Parallelogramm gearbeitet haben, so soll das in dieser Stunde auch nicht thematisiert werden. Im anderen Fall muss begründet werden, warum der Flächeninhalt der Mantelfläche unabhängig von der Schnittlinie ist (Formel für den Flächeninhalt eines Parallelogramms). Mit Hilfe des OHP könnte als zusätzliche Visualisierung eine Schattenprojektion der Mantelflächen erzeugt werden, um die Inhaltsgleichheit zu verdeutlichen.

Die Sammlungsphase dient also als eine Art „Wir“–Phase dazu, das Problem in seiner Gesamtheit aus den Beiträgen aller zu beleuchten und für alle durch den Tafelnschrieb verfügbar zu machen.

An dieser Stelle wird auf das Eingangsproblem der Plastikrolle rückgekoppelt und zur weiteren Sicherung die Mantelfläche bzw. Gesamtoberfläche der Posterrolle berechnet. Dadurch sollen die Vermutungen bzw. Abschätzungen der Schüler zu Beginn der Stunde bestätigt oder widerlegt werden.

Die exemplarische Betrachtung wird verallgemeinert, um das Ausgangsproblem zu lösen “Spannungsbogen“

Hier ist nun auch das erwartete Stundenende und es besteht die Möglichkeit die Hausaufgabe zu stellen und eventuell vorzuentlasten. Von dieser erwarte ich mir einen Übungseffekt durch die alltagsbezogenen Beispiele und eine Erweiterung durch das Zusammensetzen der Formel zur Berechnung der Gesamtoberfläche.

Bei hinreichend zur Verfügung stehender Zeit, ließe sich die Formel für die Zylinderoberfläche, wie sie in Formelsammlungen zu finden ist, in Form eines „Schnipsel-Puzzles“ auf dem OHP herleiten.

Alternative Stundenenden werden bedacht.

3. Lernziele

Übergeordnetes Lernziel:

Die Schüler sollen am Beispiel einer „Klorolle“ die Gesamtoberfläche eines Zylinders berechnen.

Untergeordnete Lernziele:

Ich erwarte von den Schülern in dieser Stunde, dass sie

1. nach dem Zerschneiden einer „Klorolle“ den Zylindermantel als Netz darstellen (II).
2. aus dem Netz die Mantelfläche der Klorolle bestimmen, indem sie
   (a) entweder den Umfang des Zylinders (I)
   (b) oder die Länge des zerschnittenen Zylinders messen (I).
3. begründen, dass eine Seitenlänge des Mantels gleich dem Umfang der Grundfläche ist (II – III).
4. begründen, dass die beim Zerschneiden entstehenden Mantelflächen inhaltsgleich sind (II).
5. die Grundflächen eines Zylinders berechnen (I).
6. die Gesamtoberfläche eines Zylinders berechnen, indem sie die Summe aus Mantel- und Grundflächen bilden.

4. Hausaufgaben zur Stunde

Merkhefteintrag und Musteraufgabe zum Stichwort „Kreissegment“.

5. Geplanter Verlauf

Motivation/Problemstellung: Die mitgebrachte Posterrole wird präsentiert und erläutert. Schätzt bitte ab, die groß die Fläche ist, die zur Herstellung einer Posterrolle benötigt wird. (Bezugsgröße: Tafelohr: 1 m²) Problemformulierung Wie groß ist die Oberfläche der Posterrolle?	LV, SLG EA: Schätzung 2000 cm² Rolle „plattdrücken“ Maße müssen ermittelt werden (5min)
Experimentierphase: L. händigt Klorollen aus und bittet die Schüler sich zu überlegen, wie die für dieses Problem den Verbrauch und damit den Flächeninhalt bestimmen können. Mögl. Hilfe: 1. Wie könnte man ein Rolle herstellen? im Extremfall: Aufforderung zum Zerschneiden 2. genaue Analyse und Beschreibung der Zylinderform 3. Verweis auf die Formelsammlung/Merkheft mögl. Variationen: L. teilt zusätzliche Klorollen aus und fordert zum Zerschneiden auf andere Weise auf.	Erwartetes Schülerverhalten: Schüler zerschneiden die Klorolle messen Größen wie Höhe, Durchmesser oder Umfang des Zylinders machen sich einige Skizzen entwickeln evtl. eine Netzstruktur arbeiten mit dieser, indem Größen eingetragen werden versuchen, eine Formel zur Berechnung zu entwickeln. ES: Schüler bemerkennicht, 1. dass ein „Zerschneiden“ der Rolle zu einem Rechteck bzw. Parallelogramm führt, 2. dass die fehlende Seitenlänge der Umfang der Rolle ist. 3. Schüler wissen nicht mehr, wie die Fläche eines Rechtecks bzw. Parallelogramms berechnet wird. (15min) ----LZ 1,2 erreicht----
Sammlungsphase Vorstellung der Ergebnisse im Plenum und Vergleich	SSG, SLG EA: Schnittlinie - orthogonal zur Grundfläche: Rechteck als Mantelfläche - schräg zur Grundfläche: Parallelogramm als Mantelfläche

Jede erwartete Schwierigkeit erfordert eine adäquate Hilfe

<table>
<tr><td>L. legt zerschnittene Klorollen auf OHP, um durch eine Schattenprojektion die beiden möglichen Figuren miteinander zu verglei-chen.
Begründung der Flächengleichheit z.B. durch Abschneiden und Anlegen einer Ecke oder Kongruenzsatz

Mögl. Hilfe
1./2. Verweis auf Merkheft
3. Abschneiden und Anlegen einer Ecke als stummer Impuls</td><td>- Rechteck und Parallelogramm haben denselben Flächeninhalt, da sie in Grundseite und Höhe übereinstimmen
- Seitenlängen des Mantels sind Höhe des Zylinders und Umfang der Grund-fläche
- Anfertigung einer Skizze an der Tafel
- $M = h \cdot U$
- $O = M + 2\,G$

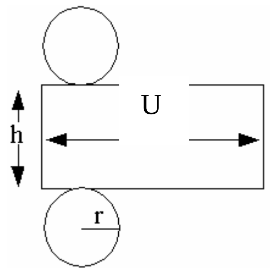
ES:
1. Verwechslung der Formel für Kreisum-fang und Kreisfläche
2. Berechnung des Radius der Grundfläche aus dem Umfang
3. Nichterkennen der Flächengleichheit von Rechteck und Parallelogramm.

(10 – 15 min) -----LZ 3, 4 erreicht----</td></tr>
<tr><td>Zwischenzusammenfassung
Tafelabschrieb</td><td>(5 min)</td></tr>
<tr><td>Sicherung:
Rückkopplung auf das Anfangsproblem:
AA: Berechnet die Gesamtoberfläche der Pos-terrolle.</td><td>SA
Ergebnisvergleich: $O = 1600 cm^2$

(7 min) -----LZ 5 erreicht-----</td></tr>
<tr><td>Reflexion
Ergebnisbetrachtung unter dem Genauigkeits-aspekt</td><td>EA:
Die Genauigkeit des Ergebnisses hängt maß-geblich von der Messgenauigkeit bei der Um-fangbestimmung ab.</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">geplantes Stundenende; HA1: Arbeitsblatt</td></tr>
<tr><td>Weiterführung:
In der Formelsammlung findet man zur Be-rechnung der Oberflächenformel eines Zylin-ders folgende Formel: $O = 2 \cdot \pi r \cdot (r + h)$

Versucht die Formel allein oder mithilfe der Fo-lienschnipsel herzuleiten.</td><td>EA:
$O = 2 \cdot G + M$
$= 2 \cdot G + \text{Umfang} \cdot \text{Höhe}$
$= 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r \cdot h$
$= 2 \cdot \pi r \cdot (r + h)$</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">mögliches Stundenende HA 2</td></tr>
</table>

6. mögliches Tafelbild

Posterrolle Maße: h = U = damit ist r =	Wie groß ist die Gesamtoberfläche der Posterrolle? Schneidet man einen Zylinder auf, so sieht man: Mantelfläche: Rechteck mit Seitenlängen h und U Grund- bzw. Deckfläche: Kreisfläche O = M + 2 G =.......  	Kladde

Hausaufgabe 1

1\. Aufgabe: Berechne die Mantelflächen bzw. wenn möglich die gesamte Oberfläche des Körpers.

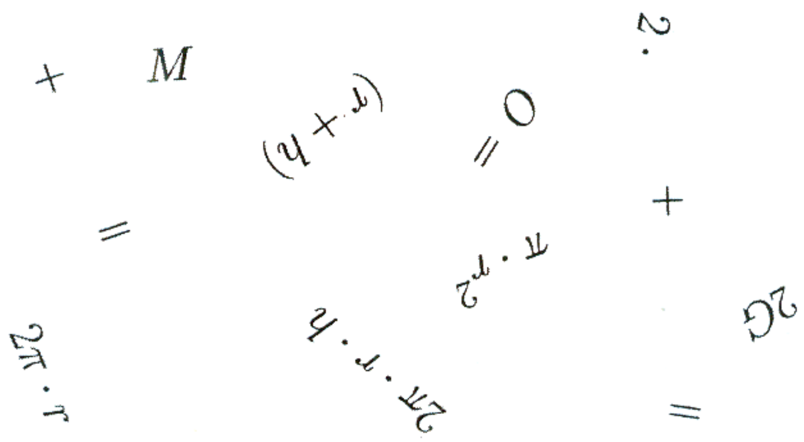
a) Eine ungebrauchte Rolle Klopapier
$h = 9{,}5\,\text{cm}$
$d = 4{,}5\,\text{cm}$

b) eine Litfasssäule
$h = 2{,}5\,\text{m}$
$d = 1{,}3\,\text{m}$

c) eine Keksverpackung (Prinzenrolle)
$h = 28\,\text{cm}$
$d = 7\,\text{cm}$

d) das Äußere eines Glases
$h = 15\,\text{cm}$
$d = 5\,\text{cm}$

2\. Aufgabe: In den Formelsammlungen steht zur Berechnung der Oberfläche eines Zylinders die folgende Formel: $O = 2\pi r(r + h)$. Bestätige diese Formel, indem du die auf dem Arbeitsblatt in Unordnung geratenen Formelteile ordnest.



Hausaufgabe 2

1. Aufgabe1 wie oben
2. Lehrbuch Seite 181, Nr.7

Kommentierter Sitzplan

Lehrer

	Dominique ○/s	Dorothea ○/s	Nelly ○/s		Kim +/g	Geesche ○/m	
Eva −/m	Neele ○/m	Matthias ++/g	Marek ○/m		Alexander F. −/s W	Eugenia ++/g S	Shannna −−/m Neu
Julius ++/g	Johannes +/g	Lara ○/m	Johanna ○/m	Florian ○/m	Anna −/s	Hannah −/s	Christoph ○/m
Jan +/g	Winfried +/g	Benedikt ++/g W	Timo −−/s W		Michael +/g	Felix ○/m W	Alexander S. −/m

Legende:

Mitarbeit:		**Leistungen:**	
Sehr engagiert	++	Gut und besser	g
Rege	+	Befriedigend	m
Mittel	○	Ausreichend	s
Still	−	Wiederholer	W
Nahezu unbeteiligt	−−	Springer	S

Literatur:

- Niedersächsisches Kultusministerium: *Rahmenrichtlinien für das Gymnasium, Schuljahrgänge 7 – 10*, Hannover 2003
- Baptist: *Weiterentwicklung von Mathematikunterricht, Teil 1: Eigenverantwortung stärken – Verständnis fördern*, Universität Bayreuth
- Jank, Meyer: *Didaktische Modelle*, Berlin 1994