Studienseminar Lüneburg für das Lehramt am Gymnasium 14.06.20XX
Mario Mersenne, Studienreferendar

STUNDENENTWURF
ZUM ERSTEN GEMEINSAMEN UNTERRICHTSBESUCH
IM FACH MATHEMATIK

Schule:	Gymnasium Mathematikum	Seminarleiter:	OStD Müller-Menzel
Klasse:	11 gN	Fachleiterin:	StD‘ Suhr
Datum:	15.06.20XX	Pädagogische Leiterin:	StR‘ Iwanoff
Zeit:	5. Stunde (11.30-12.15)	Fachlehrer:	StR Pascal
Raum:	254	Schulleiter:	OStD Leibniz

Thema der Unterrichtseinheit:
Daten beurteilen – Beurteilende Statistik

Thema der Unterrichtsstunde:
Schluss von der Stichprobe auf die Gesamtheit

Einfluss der Stichprobengröße auf die Länge des Konfidenzintervalls

Lehrbuch: Lambacher Schweizer 11/12, Niedersachsen, Klett

Taschenrechner: Casio ClassPad 330 (CAS)

1. Unterrichtsvoraussetzungen

Für gN-Kursen ist zu vermerken, wie viele Schüler Mathematik als Prüfungsfach gewählt haben. Grundsätzlich müssen die Schüler sich erst zu Beginn der Jgst. 12 entscheiden, häufig steht die Entscheidung aber bereits in Jgst. 11 fest

1.1 Bild der Lerngruppe

Nachdem ich den 11gN Kurs von Herrn Pascal zunächst im Rahmen einiger Hospitationsstunden begleitet habe, unterrichte ich ihn seit Ende April in eigener Verantwortung. Die Lerngruppe setzt sich aus 16 Jungen und 6 Mädchen zusammen. Das Verhalten der Schülerinnen und Schüler[1] untereinander sowie gegenüber der Lehrkraft wird als freundlich und aufgeschlossen empfunden. Die Schüler unterstützen und helfen sich in selbst gebildeten Kleingruppen gut untereinander.

Der Kurs zeigt insgesamt eine recht geringe Leistungsfähigkeit. Die meist im Durchschnitt liegende Leistungsbereitschaft lässt sich durch das Betrachten mathematischer Probleme, die eine große Alltagsrelevanz aufweisen, erhöhen.

Soweit wie möglich sollten die Schüler in Hinblick auf Kompetenzen, die in der Stunde zum Tragen kommen, charakterisiert werden.

Insbesondere Pas und Chris haben oft gute Ansätze für das Lösen mathematischer Probleme. Auch Thas, Jan und Ann gelingt es manchmal, den Unterricht mit guten Ideen voranzubringen. Luz, Mel und Van beteiligen sich eher selten aus eigener Initiative, zeigen aber in den Arbeitsphasen ein gutes Verständnis für die Unterrichtsinhalte. Daneben gibt es zahlreiche Schüler, bei denen die fehlende Beteiligung auf das Fehlen eines grundlegenden mathematischen Wissens sowie größere Verständnisprobleme zurückzuführen ist (u.a. Fe, Kev und Pat). Jon, Phil, Max und Sa bringen sich zwar häufig ins Unterrichtsgespräch ein, lassen aber in Beiträgen, die über eine Reproduktion hinausgehen, ebenso größere Lücken und Verständnisprobleme durchblicken.

Dus und Jo fordern in den Arbeitsphasen häufig die Unterstützung der Lehrkraft ein und sind sehr bemüht, beteiligen sich aber ansonsten kaum. Nic ist erst seit zwei Wochen aus dem Ausland zurück, ihm fehlen zu einer angemessenen Mitarbeit daher noch die Grundlagen der beurteilenden Statistik.

1.2 Einbettung der Stunde – Lernvoraussetzungen

Es sind die für die Stunde relevanten Lernvoraussetzungen darzustellen; dabei ist es unerheblich, wie und an welchen Beispielen die Inhalte hergeleitet wurden.

Vor drei Wochen wurden nach einer intensiven Betrachtung der Binomialverteilung zunächst die Sigma-Regeln anhand von Beispielen hergeleitet. Auf Grundlage der Sigma-Umgebungen um den Erwartungswert sollten die Schüler dann Wahrscheinlichkeitsaussagen für binomialverteilte Zufallsgrößen treffen und die errechneten Ergebnisse in Bezug auf konkrete Sachverhalte interpretieren.

Beim Aufgabentyp „Schluss von der Gesamtheit auf die Stichprobe“ lag der Fokus bei der Angabe von Punkt- und Intervallschätzungen auf der Schulung der Problemlösefähigkeit, außerdem wurden Modellierungsaspekte berücksichtigt. Ebenso wurde mit dem Typ „Schluss von der Stichprobe auf die Gesamtheit“ verfahren, bei dem die Schüler einführend zunächst eine sogenannte Konfidenzellipse hergestellt haben, bevor die graphische Bestimmung von Konfidenzintervallen thematisiert wurde.

Die Schüler sind darin geübt, Fragen für ein dargelegtes Problem zu formulieren und Lösungsstrategien zu entwickeln. Allerdings bereiten sowohl das Übersetzen von Problemen in die Mathematik als auch die Umsetzung einer Lösungsstrategie noch regelmäßig Schwierigkeiten.

[1] im Folgenden aus Gründen der Lesbarkeit das generische Maskulinum „Schüler“ verwendet.

Im Zentrum der heutigen Stunde, die problemlösend angelegt ist, steht die Hinführung zur Bestimmung eines genügend großen Stichprobenumfangs anhand des auf Folie 2 dargestellten Sachverhaltes (siehe Kapitel 9). Die Schüler können im Rahmen der Lösungsfindung unter Verwendung des Taschenrechners auf bekannte Arbeits- und Rechentechniken zurückgreifen, neu sein wird hingegen die Betrachtung und Interpretation eines variierenden Stichprobenumfangs.
Zum Abschluss der Einheit soll in den nächsten Stunden die exakte Bestimmung eines notwendigen Stichprobenumfangs sowie die algebraische Bestimmung von Konfidenzintervallen thematisiert und geübt werden.

Hier wird der Neuigkeitsgehalt der Stunde ausgewiesen und die Fortführung in den Folgestunden umrissen. Damit wird die Stellung der Stunde innerhalb der Sequenz deutlich. Außerdem wird klar, dass die Schüler in diese Stunde das Konfidenzintervall graphisch bestimmen, obwohl ihnen ein CAS zur Verfügung steht.

2. Vorüberlegungen zur Didaktik und Methodik

2.1 Sachanalyse

Diese Sachanalyse ist sehr lang; in den allermeisten Fällen kann sie in Mathematik sehr knapp gehalten werden.

Beim „Schluss von der Stichprobe auf die Gesamtheit“ beschäftigt man sich mit der Frage, welche Erfolgswahrscheinlichkeit einem Zufallsversuch zugrunde liegt. Ziel ist es, ausgehend von einer absoluten (X) oder relativen Häufigkeit $\left(\frac{X}{n}\right)$ in einer Stichprobe, einen Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit p in der Gesamtheit zu bestimmen.
Mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% liegt ein Stichprobenergebnis X in der 1,96σ-Umgebung des Erwartungswertes. Werden in der Stichprobe absolute Häufigkeiten betrachtet, gilt:

$E(x) - 1{,}96\sigma \leq X \leq E(x) + 1{,}96\sigma$ und somit $|X - E(x)| \leq 1{,}96\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

Als Lösung dieser Ungleichung erhält man ein Intervall $[p_{min}; p_{max}]$ von Erfolgswahrscheinlichkeiten p, mit denen das Stichprobenergebnis X verträglich ist und die daher - ausgehend von der 95%-Umgebung - für die Gesamtheit prognostiziert werden können. Dieses Intervall wird als *95%-Konfidenzintervall* oder auch *Vertrauensintervall für p* bezeichnet.
Für einen größer werdenden Stichprobenumfang n bei einem anteilsmäßig gleichbleibenden Stichprobenergebnis $\frac{X}{n}$ können folgende Beobachtungen getroffen werden:

1. Je größer n wird, desto kleiner wird das zugehörige Konfidenzintervall.
2. Bei großen n ändern sich die Intervallgrenzen und die Intervalllänge kaum noch.

D.h. die Genauigkeit der Prognose für p steigt mit wachsendem n, ab einem gewissen n ist jedoch kaum noch eine Verbesserung möglich.
Diese Zusammenhänge führen unter Hinzunahme einer maximal zugelassenen Abweichung zwischen dem Stichprobenergebnis $\frac{X}{n}$ und der Erfolgswahrscheinlichkeit p unmittelbar auf die für die Folgestunde vorgesehene rechnerische Bestimmung des dafür notwendigen Stichprobenumfangs (vgl. Griesel et al., 2011, S. 442 f.).

Ebenso erhält man durch Umformung der obigen (Un)Gleichung $p_{min} + 1{,}96\frac{\sigma}{n} \leq \frac{X}{n}$.
Für das betrachtete Beispiel sei das Stichprobenergebnis $\frac{X}{n} = 0{,}52$ und es soll gelten $p_{min} \geq 0{,}5$;

also: $0{,}5 + 1{,}96\frac{\sqrt{n \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}}{n} \leq 0{,}52 \rightarrow n \geq 2401$

Hier erfolgt die Konkretion für das betrachtete Beispiel. Dass keine algebraische Herleitung intendiert wird, muss in der Sachanalyse nicht begründet werden, sondern ist Gegenstand der didaktischen Analyse

2.2 Didaktisch-methodische Vorüberlegungen

In Mathematik ist es häufig schwierig, Didaktik und Methodik voneinander zu trennen, ohne dass es zu unschönen Redundanzen kommt. Insbesondere spielen bei der Beispielauswahl didaktische Überlegungen eine zentrale Rolle.

Im niedersächsischen Kerncurriculum für die gymnasiale Oberstufe im Fach Mathematik ist unter den anzustrebenden inhaltsbezogenen Kompetenzen die Leitidee „Daten und Zufall“ angegeben. Demnach sollen die Schüler dazu befähigt werden, unter Verwendung der eingeführten Technologie zu fundierten und kontrollierten Urteilen in realen Entscheidungssituationen zu gelangen.
Als ein Aspekt der zu thematisierenden Inhalte wird der Schluss von der Stichprobe auf die Gesamtheit genannt (vgl. Kapitel 2.1). Unter diesem Oberbegriff kann auch der Gegenstand der heutigen Stunde, die Hinführung zur Bestimmung eines notwendigen Stichprobenumfangs, eingeordnet werden. Die Betrachtung eines notwendigen Stichprobenumfangs ist zudem im schulinternen Lehrplan im Lernbereich „Beurteilende Statistik“ explizit vorgesehen (vgl. MK, 2009, S. 25).
Im Hinblick auf die umzusetzenden prozessbezogenen Kompetenzen „Probleme mathematisch lösen“ und „mathematisch argumentieren“ soll der Lerngegenstand mithilfe eines Problems erschlossen werden (vgl. MK, 2009, S.15/16).
Das Problem zeichnet sich, wie von Klafki 1964 gefordert, durch eine hohe Alltagsrelevanz aus. Sowohl das Thema „NPD-Verbot“ als auch Meinungsumfragen zur Erstellung von Prognosen im Allgemeinen sind für die Schüler in den Medien allgegenwärtig. Die im Rahmen eines Problemlöseprozesses erfolgte Interpretation von Konfidenzintervallen für verschieden große n trägt dazu bei, dass die Schüler zukünftig das Zustandekommen von Meinungsbildern sowie deren Aussagekraft differenzierter als zuvor betrachten können.

Neben Klafki wäre an dieser Stelle auch W. Heymann, Mathematik und Allgemeinbildung, zu zitieren.

Somit sind sowohl die Gegenwarts- als auch die Zukunftsbedeutung sowie die exemplarische Bedeutung nach Klafki gegeben (vgl. Klafki, 1964, S. 5-34).
Das Hauptziel der Stunde ist die Untersuchung des Einflusses des Stichprobenumfangs auf die Aussagekraft des daraus resultierenden Konfidenzintervalls. Die Betrachtung verschieden großer Stichprobenumfänge wird bewusst nicht sofort vorgegeben, sondern durch eine fragwürdige Aussage in der ausgewählten Problemstellung motiviert.
Diese Vorgehensweise erscheint für die Lerngruppe außerdem als besonders gut geeignet, da Aufgaben mit Anwendungsbezug erfahrungsgemäß eine höhere Leistungsbereitschaft hervorrufen (vgl. Kapitel 1.1).

Hier wird eine methodische Alternative (→ aufgabenorientierte Stundenanlage) angedeutet. Alternativen sind nur dann als solche anzugeben, sofern sie echte Alternativen für die Lerngruppe in der aktuellen Lernsituation darstellen.

Die Hausaufgabe zur Stunde wird eingesammelt, da es sich hierbei um eine wiederholende Übungsaufgabe handelt, die für den weiteren Verlauf keine Relevanz aufweist. Im Rahmen der Durchsicht können bestehende Schwierigkeiten diagnostiziert und ggf. nach der Rückgabe aufgegriffen werden.
Zum Stundeneinstieg wird den Schülern eine Zeitungsnotiz präsentiert, der eine Umfrage zum NPD-Verbot zum Thema hat. Dies dient dazu, den Fokus auf die Aussage „Mehrheit“ - gleichbedeutend mit „p > 0,5“ - zu richten und die Eingangsvoraussetzungen (→ Bestimmung des Konfidenzintervalls) zu sichern. Der Einstieg in das Problem wird durch die Lehrkraft anmoderiert und mithilfe des OHP unterstützend visualisiert. Auf der Folie sind bewusst nur die notwendigsten Informationen enthalten, die Formulierung und die Umfrageergebnisse sind so gewählt, dass eine Kritik an der Aussage provoziert wird. Um die Schüler nicht zu überfordern und die Bereiche Stichprobe und Grundgesamtheit voneinander

Grundsätzlich kann die Entscheidung, die HA einzusammeln, um individuelle Rückmeldungen zu geben, akzeptiert werden. Gleichwohl wurde hier eine Chance vertan, den ersten Teil der Stunde zu entlasten: Die Bestimmung eines 95%-Konfidenzintervalls mit X=260 und n=500 – ohne den expliziten Sachzusammenhang – liefert Daten, die zur Beurteilung der ersten Überschrift genutzt werden können.

abzugrenzen, habe ich die Ergebnisse der Umfrage zudem in absoluten und nicht in relativen Häufigkeiten angegeben.

Mit einer Murmelphase soll erreicht werden, dass sich nicht nur einige wenige Schüler Gedanken über den Sachverhalt und eine mögliche Fragestellung (→ Überschrift gerechtfertigt?) machen, sondern die gesamte Lerngruppe aktiviert wird. Die intendierte Fragestellung sowie ein möglicher Weg zur Beantwortung der Frage werden gemeinsam im Plenum besprochen, um das Zielvorhaben insbesondere auch für die leistungsschwächeren Schüler transparent zu gestalten. Das Aufstellen der Lösungsstrategie erfolgt verbal, da sich deren Komplexität in Grenzen hält und den Schülern die grundsätzliche Vorgehensweise aus den vorherigen Stunden vertraut ist. Gleichwohl werden die zur Bestimmung notwendigen Kenngrößen an der Tafel festgehalten, um den leistungsschwächeren Schülern Orientierung zu geben.

Es ist durchgängig festzustellen, dass der Verfasser Entscheidungen in Bezug auf die Lerngruppe begründet. Ebenso wird deutlich, an welchen Stellen Schwierigkeiten erwartet werden und wie diesen begegnet werden soll.

Die graphische Bestimmung des Konfidenzintervalls wird den Schülern in Einzel- bzw. Partnerarbeit überlassen, da diese Vorgehensweise bereits mehrfach geübt wurde (vgl. Kapitel 1.2). Trotz dessen könnte es sein, dass einige Schüler nach wie vor Probleme mit der „WINDOW"-Einstellung sowie bei der Schnittstellenbestimmung mit dem GTR haben werden. In diesem Fall sollen sich die Schüler gegenseitig unterstützen, ggf. greift die Lehrkraft mit gezielten Hinweisen ein.

Nach dem Abgleich des Ergebnisses sollen die Schüler im Unterrichtsgespräch eine Antwort auf die eingangs gestellte Frage formulieren, die schließlich an der Tafel notiert wird. Hierbei werde ich eine exakte Formulierung einfordern. Damit möchte ich die allgemein im Rahmen von Anwendungsaufgaben und Problemlöseprozessen erforderliche Fähigkeit, rechnerisch bestimmte Lösungen in Bezug auf einen Sachverhalt zu interpretieren, vertiefend schulen (vgl. Kapitel 1.2).

Durch die zweite Folie, auf der keine Informationen zum Stichprobenumfang gegeben wird, werde ich die Schüler als gezielten Impuls auf die nähere Betrachtung des für die Aussagekraft von Umfragen verantwortlichen Stichprobenumfangs bringen. Daraus ergibt sich die Leitfrage, wie groß der Stichprobenumfang (mindestens) gewesen sein müsste, damit die Überschrift gerechtfertigt ist.

Die intendierte Leitfrage korrespondiert mit dem Stundenthema. Suhr: Stundenthema, Stundenlernziel und Leitfrage bilden eine Trias in Bezug auf den Inhalt

Für die Beantwortung dieser Frage steht den Schülern kein Kalkül zur Verfügung; es handelt sich also um ein echtes Problem (Typ: x – x) (vgl. R. Bruder et al.: Mathematikunterricht entwickeln, S. 28 ff), das durch systematisches Probieren gelöst werden kann. Dies mögliche Vorgehen soll im Sinne einer Strategiefindung im Plenum herausgearbeitet werden, wobei notwendigenfalls meinerseits noch einmal auf den Unterschied zur Eingangsproblematik verwiesen werden muss. Es ist nicht zu erwarten, dass Schüler eine algebraische Betrachtung fordern.

Hier wird die vorrangige Prozesskompetenz analysiert.

Das intendierte Vorgehen dient dazu, die Prozesskompetenz „Probleme mathematisch lösen" vorrangig zu fördern. Dabei finden folgende Aspekte Berücksichtigung: 1. Entwicklung einer Fragestellung (vgl. Bruder, in ml 115): Problemlösen fängt mit Fragestellen an), 2. Systematisches Probieren (→ heuristische Strategie) und 3. Ergebnissammlung in einer Tabelle (→ heuristisches Hilfsmittel).

Die Bestimmung von Konfidenzintervallen für verschieden große n in der sich anschließenden Arbeitsphase erfolgt arbeitsteilig, wobei vorweg gesichert werden muss, dass der Anteil der Verbotsbefürwortern gleich bleibt, also die Zufallsgröße X in Abhängigkeit von n in den Gruppen verschieden ist. Durch die arbeitsteilige Bearbeitung können alle Schüler einen Beitrag zum späteren Gesamtergebnis leisten,

Auch methodische Entscheidungen werden mit Blick auf die Lerngruppe begründet.

zudem wird durch diese Vorgehensweise Zeit eingespart. Erfahrungsgemäß unterstützen sich die Schüler aus eigener Initiative gegenseitig, wenn es ihnen freigestellt wird allein oder in kleinen Gruppen zu arbeiten. Eine Zusammensetzung bestimmter Gruppen erscheint daher für diese Phase eher kontraproduktiv und nicht zielführend. Stattdessen erfolgt die Zuteilung der verschiedenen Stichprobenumfänge durch die Lehrkraft so, dass Sitznachbarn, die regelmäßig gemeinsam arbeiten, die gleiche Aufgabe bekommen.

Die zu betrachtenden Stichprobenumfänge n sowie die jeweils zugehörige Anzahl X an Verbotsbefürwortern werde ich in Form einer Tabelle auf Folie vorgeben. Unter der Tabelle habe ich notiert, welche Schüler sich um welchen Stichprobenumfang kümmern sollen. Alternativ könnte ich die Schüler verschiedene Stichprobenumfänge n auswählen lassen. Allerdings möchte ich durch die zielgerichtete Auswahl einiger bestimmter Werte sicherstellen, dass die wesentlichen das Konfidenzintervall betreffenden Veränderungen im Rahmen der Sammlungsphase von den Schülern beobachtet werden können.

Die Arbeitsergebnisse der einzelnen Gruppen werden ebenfalls auf der Folie gesammelt und in der freien Spalte notiert. Da in der ersten Arbeitsphase und in den vorherigen Stunden die Bestimmung von Konfidenzintervallen ausgiebig thematisiert wurde, sollten hierbei keine Komplikationen auftreten. Schnelle Schüler werde ich zwecks Binnendifferenzierung dazu anregen, ihr Ergebnis mit dem eingangs bestimmten Konfidenzintervall zu vergleichen und mit den bereits auf der Folie notierten Intervallen in Verbindung zu setzen.

Von großer Bedeutung für die Erreichung des Hauptlernziels der Stunde wird die vergleichende Betrachtung der verschiedenen Konfidenzintervalle sein. Diese erfolgt daher gemeinsam im Plenum, wichtige Kernaussagen sowie eine Antwort auf die Leitfrage werden an der Tafel von mir gesichert. Um einen Zugang zu einem weiterführenden Vergleich der einzelnen Ergebnisse zu erhalten, werde ich die Schüler zunächst dazu auffordern, die Ergebnisse zu beschreiben. Eventuell stellen die Schüler in diesem Zusammenhang bereits von sich aus Vergleiche an oder versuchen die Leitfrage durch Betrachtung der einzelnen Konfidenzintervalle zu beantworten. Ich werde versuchen, flexibel auf die verschiedenen Beiträge zu reagieren und daher die Betrachtungsreihenfolge offen lassen. Als Endergebnis sollen aber in jedem Fall eine Antwort auf die Leitfrage sowie das Konfidenzintervall betreffende Veränderungen für ein wachsendes n festgehalten werden.

Der Verfasser ist sich bewusst, dass er die Plenumsdiskussion nicht exakt vorplanen kann. Dadurch bewahrt er sich größtmögliche Offenheit. Gleichwohl behält er die intendierten Ergebnisse im Auge.

Sollten die Schüler Schwierigkeiten mit der Interpretation der Intervalllängen haben, werde ich sie dazu auffordern, zunächst zwei Intervalle miteinander zu vergleichen. Dies könnte insbesondere für die Beobachtung, dass sich die Intervallgrenzen sowie die Intervalllängen für große n kaum noch verändern, erforderlich sein.

Als erste Vertiefungsmöglichkeit bietet es sich an, weitere Planungsüberlegungen für die Durchführung von Umfragen zu beleuchten und zu diskutieren.

Möglicherweise werden die Schüler vorschlagen, den Stichprobenumfang durch eine gezielte Suche für $2000 < n < 3000$ genauer zu bestimmen. Da dazu voraussichtlich nicht ausreichend Zeit zur Verfügung stehen wird, werde ich diese Aufgabe in die Hausaufgabe verlagern. Weiterhin kann die im Vergleich zur Einstiegsfolie um einige Informationen ergänzte Folie 2 als Denkanstoß dienen. Hierdurch kann das thematisierte Beispiel noch näher mit der Realität verknüpft werden. Abschließend könnten die Alltagsrelevanz bzw. auch die Zukunftsbedeutung der heutigen Stunde reflektiert werden.

Als Hausaufgabe ergibt sich eine genauere Bestimmung des Stichprobenumfangs n, durch systematisches Probieren analog zum Vorgehen in der Stunde. Möglich ist auch, den

Stichprobenumfang algebraisch exakt mithilfe des Ansatzes $p_{min} + 1{,}96\,\frac{\sigma}{n} \leq \frac{X}{n}$ zu bestimmen. Dazu muss allerdings zunächst die Äquivalenz zu bekannten Ungleichung $\mu_{min} + 1{,}96\,\sigma \leq X$ gezeigt werden. Da der Kurs insgesamt sehr leistungsschwach ist, soll dies die Aufgabe für die leistungsstarken Schüler sein. Die zweite Hausaufgabe kann als Vorbereitung für die Bestimmung des notwendigen Stichprobenumfangs dienen.
Die alternative Hausaufgabe ist für den unwahrscheinlichen Fall gedacht, dass das Stundenende 1 nicht erreicht wird. Dabei wird das Vorgehen der Stunde in einem anderen Sachkontext aufgegriffen.

3. Lernziele

STUNDENLERNZIEL

Die Schüler untersuchen problemorientiert den Einfluss des Stichprobenumfangs n auf die Aussagekraft eines Stichprobenergebnisses für die Gesamtheit, indem sie Konfidenzintervalle für verschieden große n mithilfe des CAS bestimmen und entsprechende Veränderungen für wachsende n interpretieren.
(Probleme mathematisch lösen (und mathematisch argumentieren))

Das Stundenlernziel ist in Mathematik als Prozesslernziel zu formulieren (s. Reader), wobei die vorrangig geförderte Prozesskompetenz zum Ausdruck kommen soll. Stundenthema, Leitfrage und Stundenlernziel sind stimmig aufeinander bezogen, wodurch die Schlüssigkeit in der Planung zum Ausdruck kommt.

TEILLERNZIELE

Die Schüler …

(1) …beschreiben einen dargestellten Sachverhalt und geben eine im Zusammenhang relevante Fragestellung an. (AFB I-II)
(2) …widerlegen eine Aussage, indem sie ein Konfidenzintervall mithilfe des CAS explizit bestimmen und in Bezug auf den Sachverhalt interpretieren. (AFB II)
(3) …untersuchen aus einer Vergrößerung des Stichprobenumfangs resultierende Veränderungen bei gleichbleibender relativer Häufigkeit auf den Schluss von der Stichprobe auf die Gesamtheit, indem sie arbeitsteilig die zugehörigen Konfidenzintervalle mithilfe des CAS bestimmen und ihre Ergebnisse in Bezug auf einen vorgegebenen Sachverhalt interpretieren. (AFB II)
(4) …analysieren den Einfluss des Stichprobenumfangs n auf das Konfidenzintervall, indem sie alle errechneten Werte miteinander vergleichen und ihre Beobachtungen bezüglich der Intervalllänge erläutern. (AFB II-III)

---

(5) …diskutieren weitere für die Durchführung von Meinungsumfragen relevante Aspekte und beurteilen den Nutzen der in der heutigen Stunde getroffenen Beobachtungen. (AFB II-III)

4. Hausaufgabe zur Stunde

„Sonntagsumfrage“: Von 2500 Personen haben 185 angegeben die FDP zu wählen, wenn am Sonntag Bundestagswahl wäre. Kann die FDP - ausgehend von dieser Umfrage - damit rechnen, bei der nächsten Wahl in den Bundestag einzuziehen? Beantworten Sie die Frage, indem sie das zugehörige 95%-Konfidenzintervall bestimmen. Skizzieren Sie auch die Konfidenzellipse.

5. Geplanter Stundenverlauf

Lehrerverhalten *Sachlogischer Gedankengang, HI*	**Schülerverhalten** *EA, ES, Sozialformen, Medien*
Begrüßung	
Hausaufgabe L sammelt Hausaufgabe ein.	S geben ihre Hausaufgabe ab.
Problemstellung L erzählt: „Niemand, der derzeit die Nachrichten verfolgt oder die Tageszeitungen liest, kommt um das Thema NPD-Verbot herum. Für und Wider werden diskutiert und verschiedene Expertenmeinungen publiziert. Oft sind Ergebnisse aus Meinungsumfragen Bestandteil der Berichterstattung. Mir ist zu diesem Thema folgender Bericht aufgefallen.“ L legt Folie 1 mit der Problemstellung auf, leitet Murmelphase ein. **Präzisierung des Problems** L fordert S auf, eine Frage zum dargestellten Sachverhalt zu formulieren und notiert diese an der Tafel. L: „Nennen Sie eine Möglichkeit zur Beantwortung der Leitfrage.“ Impuls: „Geben Sie die Informationen an, die Sie dem Text entnehmen.“ „Ermitteln Sie eine Antwort auf die Leitfrage.“	**SLG:** ***OHP*** S lesen den Sachverhalt durch und tauschen sich dann aus. EA: S beschreiben den dargestellten Sachverhalt, kritisieren die Verallgemeinerung auf die Gesamtbevölkerung und geben ggf. schon eine Art Leitfrage an. **SLG/TA:** ***Tafel*** Formulierung einer ersten Frage (**EA:** z.B. ***Spiegelt die Überschrift tatsächlich die Meinung der Gesamtbevölkerung wider? oder: Spricht sich tatsächlich eine Mehrheit der Bevölkerung für ein Verbot aus?)*** EA: Konfidenzintervall (für 95%-Umgebung) bestimmen, schauen, ob das Intervall nur Werte enthält, die größer als 0,5 sind gegeben: X: Anzahl der Verbotsbefürworter, binomialverteilt; $X = 260$; $n = 500$; 95% $\rightarrow$ $1{,}96\sigma$ gesucht: p
LZ 1	
Arbeitsphase I L steht als Ansprechpartner zur Verfügung und beobachtet die S. Hilfen: 1a) S anregen, sich gegenseitig zu helfen, ggf. gibt L gezielten Hinweis 1b) L verweist auf Bedeutung der Achsen	**EA/PA:** ***TR*** S bestimmen Konfidenzintervall (graphisch mithilfe des TR) und versuchen auf Grundlage des Ergebnisses die Leitfrage zu beantworten. ES: 1. Bestimmung des Konfidenzintervalls misslingt durch **(a)** falsches Aufstellen der Funktionsgleichungen

	(b) ungünstige WINDOW-Einstellung
Sicherung L notiert das Konfidenzintervall und die Antwort auf die Leitfrage an der Tafel.	**SLG/TA:** ***Tafel*** S geben das Konfidenzintervall an und interpretieren das Ergebnis in Bezug auf die Leitfrage EA: Ausgehend von einer 95%-Umgebung liegt der Anteil der Befürworter eines NPD-Verbotes in der Gesamtbevölkerung zwischen 47,6% und 56,3%. S formulieren Antwort auf die Leitfrage, etwa: **Auf Grundlage der Umfrage ist es nicht sicher, dass sich tatsächlich eine Mehrheit der deutschen Bevölkerung für ein NPD-Verbot ausspricht.**
LZ 2	
Weiterführende Problematisierung **Folie 2** L: „Vergleichen Sie die Meldungen."	**SLG** ***Tafel / OHP*** EA: Stichprobengröße fehlt; auch im ersten Beispiel 52%; je mehr Menschen befragt werden, desto genauer ist das Konfidenzintervall; wenn man die gesamte Bevölkerung befragt, kennt man p genau **Wie viele Personen müssen (in etwa) befragen werden, damit die Aussage ausgehend von einer 95%-Umgebung tatsächlich die Meinung der Mehrheit der Bevölkerung widerspiegelt, also $p > 0{,}5$ ist?**
Planung des Vorgehens: L: „Wie würden Sie vorgehen, um die Frage zu beantworten?" Hilfe: konkretes Beispiel: $n = 500$, $X = 260$; $n = 1000$, $X = 520$ Anmoderation der Arbeitsphase: Arbeitsteilige Bestimmung der Konfidenzintervalle für verschieden große n betrachten (→ Folie; Wer bearbeitet welches n); Arbeit allein oder in kleinen Gruppen; Ergebnisvergleich zunächst untereinander; Notieren der Ergebnisse auf der Folie; anschließend Interpretation in Bezug auf den Sachverhalt." Zeit: max. 10min	EA: Konfidenzintervalle für verschieden große Stichproben n bestimmen, Anteil der Befürworter muss gleich bleiben, d.h. X ändert sich mit n ES: S. beachten nicht, dass sich X mit n ändert

<table>
<tr><td>Arbeitsphase II

L steht als Ansprechpartner zur Verfügung und beobachtet die S.

Hilfen:
1. (siehe Arbeitsphase I)
2) L fordert dazu auf, die jeweiligen Ergebnisse in direktem Zusammenhang mit der Ausgangsfrage zu betrachten
3. schnelle S werden dazu angeregt, die bereits auf der Folie notierten Ergebnisse in Verbindung miteinander zu setzen</td><td>SB/GA:TR / OHP
S bestimmen arbeitsteilig die Konfidenzintervalle für n= 1000 / 2000 / 3000 / 4000 / 12000 / 16000, notieren ihre Ergebnisse auf Folie und interpretieren diese.

ES:
1. Bestimmung der Konfidenzintervalle misslingt
2. Interpretation der Ergebnisse fällt schwer
3. große Unterschiede im Arbeitstempo</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">LZ 3</td></tr>
<tr><td>Zusammentragen der Ergebnisse
L: „Beschreiben Sie die Ergebnisse und formulieren Sie eine Antwort auf die Leitfrage.“
„Vergleichen Sie die einzelnen Ergebnisse miteinander.“
ggf.: „Versuchen Sie Kernaussagen für Ihre Beobachtungen zu formulieren (→TA).“

L notiert je nach Reihenfolge der Antworten.

Hilfe:
1. L fordert S nach dem Notieren der Antwort auf die Leitfrage auf, alle Intervalle miteinander zu vergleichen (s.o.).
2. L lenkt auf Betrachtung der ungefähren Intervallgrenzen hin.</td><td>SSG/SLG: Tafel / OHP
S formulieren (explizit) Antwort auf die Leitfrage.
S betrachten die Zusammenstellung der Konfidenzintervalle für die verschiedenen n und vergleichen diese miteinander.

EA (für TA): Je größer n wird, desto kleiner wird das Konfidenzintervall. / Ab etwa 3000 Befragten kann man (ausgehend von einer 95%-Umgebung) sicher sein, dass sich mehr als die Hälfte der Bevölkerung für ein Verbot ausspricht, wenn dies 52% in der Stichprobe tun. bzw. Es müssen zwischen 2000 und 3000 Personen befragt werden, um (ausgehend von einer 95%-Umgebung) sicher zu sein, dass sich mehr als die Hälfte der Bevölkerung für ein Verbot ausspricht. / Bei einer großen Anzahl n ändern sich die Intervallgrenzen und die Intervalllänge kaum noch.

ES: 1. S beschränken sich bei Beobachtungen auf Beantwortung der Leitfrage.
2. S interpretieren die Ergebnisse für n = 12000 und n = 16000 nicht wie oben erwartet.</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">LZ 4 - mögliches Stundenende 1</td></tr>
<tr><td>Vertiefungsmöglichkeiten
L: „Stellen Sie sich vor, dass sie als Mitarbeiter bei einem großen Meinungsforschungsinstitut angestellt sind. Warum ist die Größe des Stichprobenumfangs unabhängig vom Konfidenzintervall wichtig?“</td><td>SSG / SLG:
EA: z.B. Umfrage soll aussagekräftig sein, trotzdem nicht zu teuer / Machbarkeit der Befragung</td></tr>
</table>

„Welche Überlegungen müssen Sie zusätzlich treffen?“ Hilfe: L legt Folie 2 mit weiteren Informationen zur Umfrage auf. L: „Beurteilen Sie die Alltagsrelevanz der heutigen Stunde. Vielleicht werden Sie insbesondere beim Lesen einer großen deutschen Tageszeitung mit vier Buchstaben ggf. an die heutige Stunde zurückdenken...“	EA: z.B. Eingehen auf Repräsentativität / Zeitpunkt der Umfrage ES: S beschränken sich weiterhin auf die Betrachtung des Stichprobenumfangs. EA: z.B. Artikel vor dem Hintergrund lesen, dass es sich bei Befragungen nur um Stichproben handelt / ggf. wird zu Übertreibungen geneigt / prozentuale Anteile sind ggf. mathematisch falsch
LZ 5 - mögliches Stundenende 2	

6. Hausaufgabe

Nach Stundenende 1 oder 2

Ausgehend von einer 95%-Umgebung haben wir herausgefunden, dass im vorliegenden Beispiel zwischen 2000 und 3000 Personen befragt werden müssen, um von einer Mehrheit für ein NPD-Verbot in der Gesamtheit ausgehen zu können, wenn der Anteil der Verbotsbefürworter bei 52% in der Stichprobe liegt.

Wir haben festgestellt, dass für einen *genügend großen Stichprobenumfang* **2000 < n < 3000** gelten muss.

Bestimmen Sie den Stichprobenumfang genauer. Gehen Sie dabei analog zum Vorgehen in der Stunde vor.

oder

Die Ihnen bekannte Ungleichung $\mu_{min} + 1{,}96\,\sigma \leq X$ ist äquivalent zur Ungleichung

$$p_{min} + 1{,}96\,\frac{\sigma}{n} \leq \frac{X}{n}. \ (*)$$

a) Begründen Sie die Äquivalenz.

b) Berechnen Sie – ausgehend von diesem Ansatz (*) - n exakt für den Fall, dass wie im Stundenbeispiel $p_{min} = 0{,}5$ und $\frac{X}{n} = 0{,}52$

Alternative Hausaufgabe (wenn Stundenende 1 nicht erreicht wird) (AB):

75% der Deutschen glauben an den Gewinn des EM-Titels

In einer aktuellen Umfrage tippten 774 von 1000 Befragten auf Deutschland als Europameister.

a) Spiegelt die Aussage in der Überschrift tatsächlich die Meinung der Gesamtbevölkerung wider?

b) Wie groß muss der Stichprobenumfang in etwa sein, damit die Aussage ausgehend von einer 95%-Umgebung als Meinungsbild der Gesamtbevölkerung ausgewiesen werden kann?

7. Mögliches Tafelbild

Ist die Überschrift gerechtfertigt? X: Anz. d. Verbotsbefürworter X = 260, n = 520, 1,96σ gesucht: p 95%-Konfidenzintervall: [0,476; 0,563] Auf Grundlage der Umfrage ist es nicht sicher, dass sich tatsächlich eine Mehrheit der deutschen Bevölkerung für ein NPD-Verbot ausspricht.	Leitfrage: Wie viele Personen müssen befragt werden, damit ein Stichprobenergebnis von 52% die „Mehrheit der Bevölkerung“ widerspiegelt? ($p \geq 0,5$) Ab etwa 3000 Befragten kann man (ausgehend von einem 95%-Intervall) sicher sein, dass sich mehr als die Hälfte der Bevölkerung für ein Verbot ausspricht. **Weitere Beobachtungen** Je größer n wird, desto kleiner wird das Konfidenzintervall. Bei einer großen Anzahl n ändern sich die Intervallgrenzen und die Intervalllänge kaum noch.	PROJEKTION (Tabelle)

8. Kommentierter Sitzplan

Lehrertisch

Legende:

Quantität: +,o,- (häufig, gelegentlich, selten)

Qualität: g, m, s (gut, mittel, schwach)

Luz -/m aufmerksam, aber sehr zurückhaltend	**Phil o/s** meistens bemüht, manchmal abgelenkt	**Max o/s** meistens bemüht, manchmal abgelenkt	**Jo -/m** unsicher, schüchtern, aber bemüht	**Ja o/m** aufmerksam, beteiligt sich aber nur selten	**Jan +/m** häufig beteiligt, manchmal gute Ideen	**Thas +/g** engagiert, oft gute Ideen	
Pas +/g engagiert, gute Lösungsideen							
Mel -/g aufmerksam, manchmal gute Ideen							**Kev -/s** still, elementare Lücken
Lu -/m aufmerksam, aber sehr still	**Pat -/s** sehr still, große Verständnisprobleme	**Vin o/m** aufmerksam, aber nur selten aktiv beteiligt					**Jon +/s** sehr bemüht, aber elementare Lücken
Dus o/s versucht, sich einzubringen, fragt häufig nach							**Ter o/s** schwankende Mitarbeit, manchmal abgelenkt
Van o/m gutes mathematisches Grundverständnis	**Chris +/g** meist engagiert, gute Ideen	**Sa o/s** Mitarbeit schwankend, Antworten meist unstrukturiert	**Fe -/s** sehr still, große Verständnisprobleme	**Ann o/g** oft zurückhaltend, gutes mathematisches Wissen			**Nic** erst seit zwei Wochen aus dem Ausland zurück

5

9. Materialien

Folie 1

Deutliche Mehrheit der Deutschen will NPD-Verbot

In einer aktuellen Umfrage sprachen sich 260 von 500 Befragten für ein Verbot der rechtsextremistischen Partei aus. Dies lässt darauf schließen, dass mehr als die Hälfte der Bevölkerung ein erneutes NPD-Verbotsverfahren unterstützen würde.

Folie 2

Mehrheit der Deutschen will NPD-Verbot

Am 25. November 2011 wurden in der Innenstadt von Hannover zufällig ausgewählte Personen zum Thema Rechtsextremismus befragt.

52% der Befragten sprachen sich für ein Verbot der rechtsextremistischen Partei aus. Dies lässt darauf schließen, dass mehr als die Hälfte der Bevölkerung ein erneutes NPD-Verbotsverfahren unterstützen würde.

FOLIE

n: Umfang der Stichprobe	X: Anzahl der Befragten, die sich für ein Verbot aussprechen	95%-Konfidenzintervall
500	260	*[0,476;0,563]*
1000	520	*[0,489 ; 0,551]*
2000	1040	*[0,498 ; 0,542]*
3000	1560	*[0,502 ; 0,538]*
4000	2080	*[0,505 ; 0,535]*
12000	6240	*[0,511 ; 0,529]*
16000	8320	*[0,512 ; 0,528]*

n = 1000 Pat, Vin, Phil, Max
n = 2000 Chris, Sa, Fe, Ann
n = 3000 Jo, Ja, Jan, Thas
n = 4000 Kev, Jon, Ter, Nic
n = 12000 Luz, Pas, Mel
n = 16000 Lu, Dus, Van

10. Literaturverzeichnis

BRUDER, R. ET AL: Mathematikunterricht entwickeln – Bausteine für einen Kompetenzorientierten Unterricht, Cornelsen SCRIPTOR

BRUDER, R.: Problemlösen fängt mit Fragenstellen an, in ml 115: Heuristik – Problemlösen lernen, Friedrich Verlag 2002

GRIESEL, H., A. GUNDLACH, H. POSTEL, F. SUHR, (Hrsg.) (2011). Elemente der Mathematik. Niedersachsen 11/12. Grundlegendes und erhöhtes Niveau. Schroedel: Braunschweig.

KLAFKI, W. (1964): Didaktische Analyse als Kern der Unterrichtsvorbereitung. in Roth/Blumenthal (1964): Auswahl, Grundlegende Aufsätze aus der Zeitschrift „Die Schule“ Reihe A. S .5-34. Schroedel: Braunschweig.

NIEDERSÄCHSISCHES KULTUSMINISTERIUM (MK) (2009). Kerncurriculum für das Gymnasium – gymnasiale Oberstufe. Mathematik. – Hannover.